$$f'(x)=x'\ln(1-x)+x\left(\ln(1-x)\right)'$$
$$=\ln(1-x)+x\times\frac{-1}{1-x}$$
$$=\ln(1-x)-\frac{x}{1-x}$$

On a : $x<0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow 1-x>1$ donc $\ln(1-x)>0$

D'où : $f'(x)=\ln(1-x)+\frac{-x}{1-x}>0$

Pour $x>0$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'\left(x^2+4\right)-\left(x^2+4\right)'e^x}{\left(x^2+4\right)^2}$$
$$=\frac{e^x\left(x^2+4\right)-2xe^x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{e^x\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$$
$$=\frac{e^x\left((x-1)^2+3\right)}{\left(x^2+4\right)^2}>0$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, f est strictement croissante

T.V :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\ln(1-x)+\frac{1}{4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\ln(1-x)}{x}+\frac{1}{4x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\ln(1-x)+\frac{1}{4x}$$
$$=+\infty+0=+\infty$$

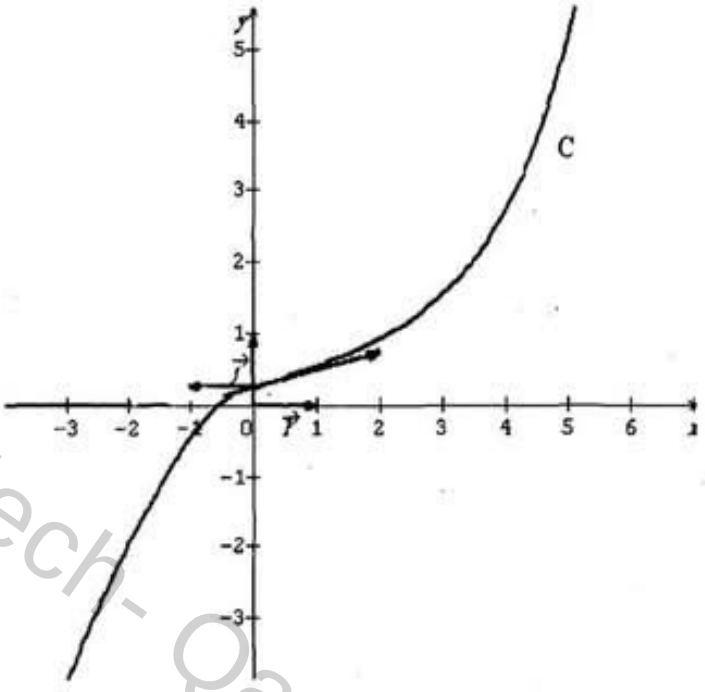
C admet une B.I.P de direction (yy') au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+4x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x^3}}{\frac{x^3+4x}{x^3}}=+\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+4x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$

Donc C admet une B.I.P de direction (yy') au voisinage de $+\infty$.

Courbe :



2) a) $x\in[0,1]$ on a :

$$\frac{x^2-2x+4}{\left(x^2+4\right)^2}-\frac{1}{4}=\frac{4\left(x^2-2x+4\right)-\left(x^2+4\right)^2}{4\left(x^2+4\right)^2}$$

On sait que $4\left(x^2+4\right)^2>0$

et on a :

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn